۱۱. کاربرد مشتق

«۱۱- کاربرد مشتق»

۱- تابع f روی [a,b] تعریف شده است و $a<c<b$. کدام بیان نادرست است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.

۲) اگر c نقطه‌ی بحرانی باشد، آنگاه c نقطه‌ی اکسترمم نسبی است. ✓

۳) اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی باشد، آنگاه c نقطه‌ی بحرانی است.

۴) اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق باشد آنگاه c نقطه‌ی بحرانی است.

می‌دانیم هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی و اکسترمم مطلق بحرانی است. ولی هر نقطه‌ی بحرانی لزوماً اکسترمم نسبی یا اکسترمم مطلق نمی‌باشد. هم‌چنین طبق قضیه‌ی کتاب درسی اگر c نقطه‌ی اکسترمم نسبی بوده و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=0$ و لذا خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی c موازی محور xها است.

۲- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|x^3-x|$ روی بازه‌ی $[-1,2]$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶ ✓

به طور کلی اگر g تابعی مشتق‌پذیر باشد آنگاه همه‌ی نقاط بحرانی تابع $f(x)=|g(x)|$ از حل معادلات $g(x)=0$ و $g'(x)=0$ به دست می‌آید:

$$g(x)=0 \longrightarrow x^3-x=0 \longrightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } x=1 \text{ یا } x=-1$$

$$g'(x)=0 \longrightarrow 3x^2-1=0 \longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

چون همه‌ی نقاط به دست آمده در بازه‌ی $[-1,2]$ قرار دارند لذا همگی آن‌ها بحرانی هستند. نقاط ابتدا و انتهای بازه نیز بحرانی است، پس $x=2$ نیز بحرانی است.

۳- مجموعه‌ی طول نقاطی که تقعر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{-2}{x^2+3}$ رو به بالا باشد به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $|x|<1$ ۲) $|x|>\sqrt{2}$ ۳) $|x|<2$ ۴) $|x|>\sqrt{3}$

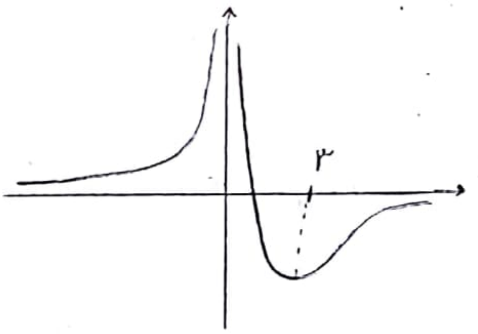
$$y=\frac{-2}{x^2+3} \longrightarrow y'=\frac{4x}{(x^2+3)^2} \longrightarrow y''=\frac{4(x^2+3)^2-2(2x)(x^2+3)(4x)}{(x^2+3)^4}=$$

$$\frac{(x^2+3)(4x^2+12-16x^2)}{(x^2+3)^4}=\frac{12-12x^2}{(x^2+3)^3}$$

چون محدب تقعر باید رو به بالا باشد پس لازم است: $y''>0$. با توجه به مثبت بودن مخرج کسر y'' داریم:

$$y''>0 \longrightarrow 12-12x^2>0 \longrightarrow x^2<1 \longrightarrow |x|<1$$

۴ـ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{ax+3}{x^2+bx}$ است. دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۰)



۱) $(-2,-2)$ ۲) $(2,0)$

۳) $(-2,0)$ ✓ ۴) $(2,2)$

با توجه به نمودار تابع در $x=0$ دارای مجانب قائم با انفصال مضاعف است، پس باید $x=0$ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد و در نتیجه $b=0$. لذا ضابطه‌ی تابع به صورت $y=\dfrac{ax+3}{x^2}$ در می‌آید. چون $x=3$ طول مینیمم نسبی تابع است و مشتق در این نقطه موجود است لذا: $y'(3)=0$

$$y'=\frac{ax^2-2x(ax+3)}{x^4}=\frac{ax-2(ax+3)}{x^3}=\frac{-ax-6}{x^3}$$

$$y'(3)=0 \longrightarrow -a(3)-6=0 \longrightarrow a=-2$$

در نتیجه $(a,b)=(-2,0)$

۵ـ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} ax+b & -1\leq x<0 \\ x^2+cx & 0\leq x\leq 1\end{cases}$ در بازه‌ی $[-1,1]$ در شرایط قضیه‌ی رول صدق می‌کند. a کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

تابع f در بازه‌ی $[-1,1]$ شرایط قضیه‌ی رول را دارد هرگاه: (۱) در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته باشد:
چون هر یک از ضابطه‌های f چند جمله‌ای و در دامنه‌ی خود پیوسته اند پس تنها باید شرط پیوستگی در $x=0$ را بنویسیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+cx)=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(ax+b)=b \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} b=0$$

۲) در بازه‌ی (۱و۱-) مشتق‌پذیر باشد:

$$f(x)=\begin{cases} ax+b, & -1\leqslant x<0 \\ x^2+cx, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} a, & -1<x<0 \\ 2x+c, & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

برای مشتق‌پذیر بودن f در بازه‌ی (۱و۱-) باید مشتق‌های راست و چپ در $x=0$ برابر باشند:

$$\begin{cases} f'_-(0)=a \\ f'_+(0)=2(0)+c \end{cases} \longrightarrow a=c$$

۳) $f(-1)=f(1)$ باشد:

$$\begin{cases} f(-1)=-a+b \\ f(1)=1+c \end{cases} \longrightarrow -a+b=1+c$$

$$\xrightarrow[a=c]{b=0} -a+0=1+a \longrightarrow a=\frac{-1}{2}$$

۶- اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=2^x$، آنگاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

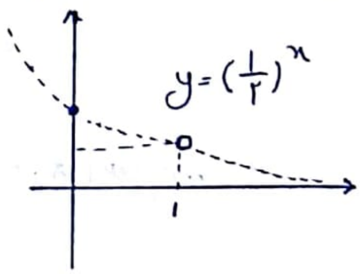
۱) ماکزیمم - مینیمم ۲) ماکزیمم - فاقد مینیمم ✓ ۳) فاقد ماکزیمم - مینیمم ۴) فاقد ماکزیمم - فاقد مینیمم

ابتدا تابع $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(x)=[x]-x \\ g(x)=2^x \end{cases} \longrightarrow g(f(x))=2^{[x]-x}$$

از آنجا که تابع $y=[x]-x$ و در نتیجه $y=x-[x]$ توابعی متناوب با دوره‌ی تناوب یک هستند تابع gof هم تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب یک است بنابراین برای رسم نمودار gof کافی است نمودار را در یک دوره‌ی تناوب رسم کنیم و سپس آن را به بازه‌های دیگر تعمیم دهیم.

$$0\leqslant x<1 \longrightarrow [x]=0 \longrightarrow gof(x)=2^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^x \longrightarrow$$



با توجه به نمودار تابع در نقاط صحیح دارای ماکزیمم نسبی است ولی مینیمم نسبی ندارد

۷- اگر $a>0$ و ثابت و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{3a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $2a$ ۲) $3a$ ۳) ۳ ۴) ۴ ✓

چون a و x مثبت هستند:

$$y=\frac{3a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}=\frac{3a}{\sqrt[4]{a^3x}}+\frac{x}{\sqrt[4]{a^3x}}=3\sqrt[4]{\frac{a^4}{a^3x}}+\sqrt[4]{\frac{x^4}{a^3x}}=3\sqrt[4]{\frac{a}{x}}+\sqrt[4]{\left(\frac{x}{a}\right)^3}$$

با فرض $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}=t\geq 0$ داریم: (عبارت با فرجی زوج منفی نمی‌شود) $y=\frac{3}{t}+t^3$

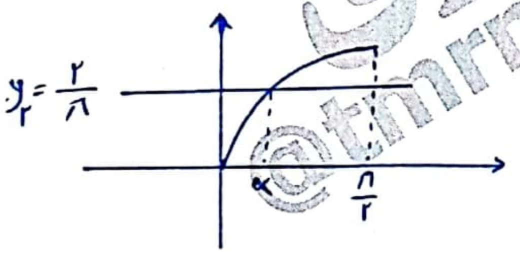
مینیمم این عبارت همان مینیمم عبارت داده شده است. بنابراین:

$$y'=\frac{-3}{t^2}+3t^2=0 \to t^4=1 \xrightarrow{t\geq 0} t=1 \to y(1)=3+1=4$$

۸- تقعر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x+\frac{x^2}{\pi}$ وقتی $\frac{\pi}{2}\geq x\geq 0$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) رو به پایین ۲) رو به بالا

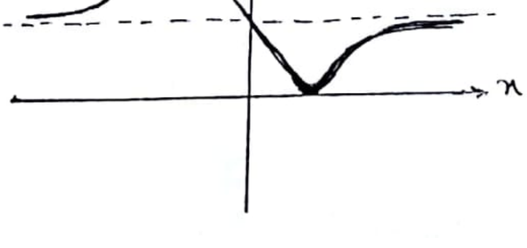
۳) ابتدا رو به پایین و سپس رو به بالا ۴) ابتدا رو به بالا و سپس رو به پایین ✓



نمودارها یک نقطه‌ی تقاطع دارند پس در یک نقطه جهت تقعر تابع عوض می‌شود. بنابراین:

$$\begin{cases}[0,\alpha): \frac{2}{\pi}>\sin x \to \frac{2}{\pi}-\sin x>0 \to y''>0 & \text{تقعر رو به بالا}\\ (\alpha,\frac{\pi}{2}]: \frac{2}{\pi}<\sin x \to \frac{2}{\pi}-\sin x<0 \to y''<0 & \text{تقعر رو به پایین}\end{cases}$$

۹- شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^2+bx+2}{x^2+1}$ است. دوتایی مرتب (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۱)



۱) $(1,-2)$ ۲) $(1,2)$

۳) $(2,-4)$ ✓ ۴) $(2,4)$

نمودار تابع f مجانب افقی خود را در نقطه‌ای به طول $x=0$ قطع می‌کند بنابراین چون $f(0)=2$ است پس خط $y=2$ مجانب افقی تابع است. بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+bx+2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2}{x^2} = a = 2$$

همچنین با توجه به شکل نمودار f در سمت راست محور y ها بر محور x ها مماس است. بنابراین معادله‌ی تلاقی تابع f با خط $y=0$ ریشه‌ی مکرر می‌دهد.

$$f(x)=\frac{2x^2+bx+2}{x^2+1}=0 \longrightarrow 2x^2+bx+2=0$$

برای اینکه معادله‌ی فوق ریشه‌ی مکرر (در اینجا مضاعف) بدهد باید $\Delta=0$ باشد. بنابراین:

$$\Delta=0 \longrightarrow b^2-4(2)2=0 \longrightarrow b^2=16 \longrightarrow b=\pm 4$$

چون منحنی در سمت راست محور y ها بر محور x ها مماس شده باید ریشه‌ی مضاعف مثبت باشد. بنابراین $b=-4$ قابل قبول است، زیرا به ازای آن:

$$2x^2+bx+2=0 \longrightarrow 2x^2-4x+2=0 \longrightarrow 2(x-1)^2=0 \longrightarrow x=1>0$$

۱۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به معادله‌ی $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2$ همواره رو به بالا است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $-1<a<1$ ۲) $-1<a<2$ ۳) $-2<a<1$ ۴) $-2<a<2$ ✓

$$y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2 \longrightarrow y'=4x^3+3ax^2+3x \longrightarrow y''=12x^2+6ax+3=$$

$$3(4x^2+2ax+1) \qquad \Delta<0 \to 4a^2-16<0 \to a^2<4 \to -2<a<2$$

۱۱- مجموعه‌ی طول نقاط عطف منحنی به معادله‌ی $y=x|x^2-4x|$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\{\frac{4}{3}\}$ ۲) $\{4, \frac{4}{3}, 0\}$ ۳) $\{4, \frac{4}{3}\}$ ۴) $\{\frac{4}{3}, 0\}$ ✓

$$y=x|x^2-4x|=\begin{cases} x^3-4x^2 \,; & x<0,\ x>4 \\ -x^3+4x^2 \,; & 0\leq x\leq 4 \end{cases} \longrightarrow y'=\begin{cases} 3x^2-8x \,; & x<0,\ x>4 \\ -3x^2+8x \,; & 0\leq x\leq 4 \end{cases} \longrightarrow$$

$$y'' = \begin{cases} 6x-8 & ; \quad x<0 \ , \ x>4 \\ -6x+8 & ; \quad 0<x<4 \end{cases}$$

مشتق دوم به ازای $x=\frac{4}{3}$ ← $6x-8=0$ صفر است و حول آن تغییر علامت می‌دهد. همچنین مشتق دوم در $x=0$ تعریف نشده ولی مماس در آن وجود دارد و مشتق دوم حول آن تغییر علامت می‌دهد.

۱۲- در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x)=x^3e^{-x}$ صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟ (ریاضی ۹۳)

۱✓) $(0\ ,\ 3-\sqrt{3})$ ۲) $(3-\sqrt{3}\ ,\ 3)$ ۳) $(3\ ,\ 3+\sqrt{3})$ ۴) $(3+\sqrt{3}\ ,\ +\infty)$

$$f'(x)=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=(3x^2-x^3)e^{-x}=x^2(3-x)e^{-x}\geq 0 \rightarrow x<3$$ (x^2 و e^{-x} هر دو مثبت)

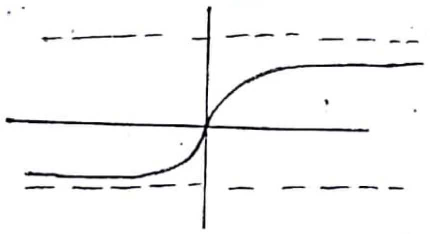
$$f''(x)=(6x-3x^2)e^{-x}-(3x^2-x^3)e^{-x}=(x^3-6x^2+6x)e^{-x}=x(x^2-6x+6)e^{-x}>0$$

$$x(x^2-6x+6)=0 \longrightarrow x=0\ ,\ \frac{6\pm\sqrt{12}}{2}=3\pm\sqrt{3}$$

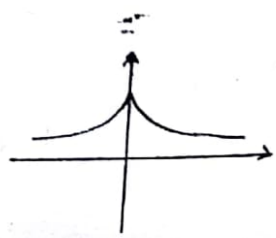
x		0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
x	$-$	0	$+$		$+$		$+$
x^2-6x+6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

با توجه به جدول تعیین علامت f'' و اشتراک آن با $x<3$ جواب مسئله $(0\ ,\ 3-\sqrt{3})$ خواهد بود.

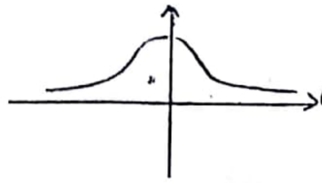
۱۳- شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟ (ریاضی ۹۳)



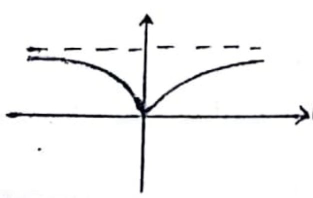
۱)



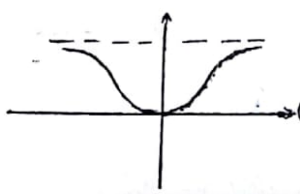
۲)



۳)



۴)



تابع در مبدأ مماس مایل دارد، پس $f'(0)\neq 0$ پس گزینه‌ی ۳ و ۴ حذف می‌شوند. هم‌چنین تابع در مبدأ نقطه‌ی عطف دارد یعنی در مبدأ مماس‌پذیر است و مشتق دوم تغییر علامت می‌دهد. پس f' قبل از صفر صعودی و بعد از آن نزولی است. اگر مشتق دوم در $x=0$ وجود داشته باشد برابر صفر است مانند تابع $y=\tan^{-1}x$ که در این صورت جواب گزینه ۲ است و اگر ناموجود باشد مانند تابع $y=\sin\left(\frac{x}{1+|x|}\right)$ جواب گزینه ۱ خواهد بود.

۱۴- نمودار تابع $y=|x|e^{-x}$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $(-\infty,2)$ ۲) $(0,1)$ ۳) $(1,2)$ ✓ ۴) $(2,+\infty)$

$$y=|x|e^{-x}=\begin{cases} xe^{-x} & ; x\geq 0 \\ -xe^{-x} & ; x<0 \end{cases} \to y'=\begin{cases} (1-x)e^{-x} & ; x>0 \\ (-1+x)e^{-x} & ; x<0 \end{cases} \to R-(0,1)$$

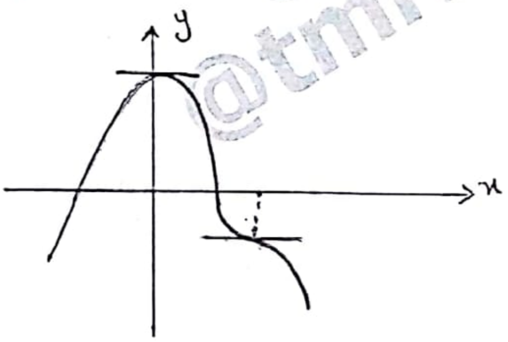
نزولی (۱)

$$y''=\begin{cases} (-1-1+x)e^{-x} & ; x>0 \\ (2-x)e^{-x} & ; x<0 \end{cases} \to 0<x<2$$

تقعر رو به پایین (۲)

$(1),(2) \to (1,2)$

۱۵- شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-x^4+8x^3+ax^2+b$ است. a کدام است؟ (ریاضی ۹۴)



۱) -18 ✓ ۲) -15 ۳) -12 ۴) -9

$f'(0)=0 \to f'(a)=0 \to x=a$ عطف

چون در عطف تابع شیب صفر است پس تابع مشتق ریشه مضاعف دارد

$$f'(x)=-4x^3+24x^2+2ax=-4x\left(x^2-6x-\frac{a}{2}\right)$$

$$x^2-6x-\frac{a}{2}=(x-3)^2 \to -2a=36 \to a=-18$$

۱۶- طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع $y=(5-x)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

$y=5x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{5}{3}} \longrightarrow y'=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} \longrightarrow y''=\frac{-10}{3\times3}x^{-\frac{4}{3}}-\frac{10}{3\times3}x^{-\frac{1}{3}}=$

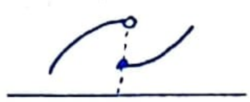
$-x^{-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{4}{3}} \longrightarrow -x^{-1}=x^{-4} \longrightarrow \frac{-1}{x}=\frac{1}{x^4} \longrightarrow x=-1$

⊕ دقت کنید که عدد صفر در دامنه‌ی f'' موجود نمی‌باشد.

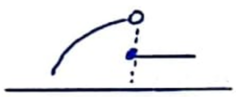
۱۷- تابع f در نقطه‌ی $x=c$ دارای مینیمم است و مشتق راست دارد؛ الزاماً این مشتق چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) مثبت ۲) منفی ۳) نامنفی ✓ ۴) نامثبت

f در $x=c$ مشتق راست دارد بنابراین پیوستگی راست دارد و چون در این نقطه مینیمم نسبی است بنابراین منحنی تابع می‌تواند به صورت زیر باشد:



مشتق راست مثبت است



مشتق راست صفر است

دقت کنید اگر مشتق راست منفی باشد نمودار در همسایگی راست نزولی خواهد بود و در این حالت نمی‌تواند مینیمم نسبی باشد.

۱۸- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^4-6x^2+8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضعیت را دارد؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) مینیمم نسبی ✓ ۲) ماکسیمم نسبی

۳) مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی ۴) فاقد اکسترمم نسبی

از آزمون مشتق اول استفاده می‌کنیم:

$f(x)=x^4-6x^2+8x \longrightarrow f'(x)=4x^3-12x+8 \xrightarrow{f'(x)=0} 4x^3-12x+8=0 \longrightarrow$

$x^3-3x+2=0$ ⊕

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x=1$ است و با تقسیم عبارت x^2-3x+2 بر $x-1$ بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$x^3-3x+2 \;\Big|\; \frac{x-1}{x^2+x-2=(x-1)(x+2)}$$

$\longrightarrow x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2) \xrightarrow{\oplus} (x-1)^2(x+2)=0 \longrightarrow \begin{cases} x=1 & \text{ریشه مضاعف} \\ x=-2 & \text{ریشه ساده} \end{cases}$

x		-2		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$+$
f	↘		↗		↗

پس تابع تنها یک مینیمم نسبی دارد.

۱۹- مقدار نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ در بازه‌ی دامنه‌ی خود کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \longrightarrow f'(x)=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\times x-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$$

$$\longrightarrow f'(x)=\frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\frac{\frac{x^2-(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}}{x^2}=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\neq 0$$

مخرج f' در $x=0$ صفر می‌شود ولی از آنجا که این نقطه عضو دامنه‌ی تابع نیست بنابراین نقطه بحرانی نیست و در نتیجه تابع نقطه بحرانی ندارد.

۲۰- مجموعه نقاطی که تقعر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x$ ؛ $0\leq x\leq 2\pi$ رو به بالا باشد در کدام بازه است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $(0,\frac{3\pi}{4})$ ۲) $(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$ ۳) $(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ ۴) $(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

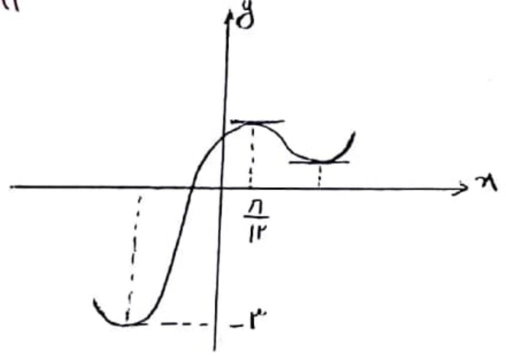
$$f(x)=x^2+2\sqrt{2}\cos x \longrightarrow f'(x)=2x+2\sqrt{2}(-\sin x) \longrightarrow f''(x)=2-2\sqrt{2}\cos x=0$$

$$\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

در بازه‌ی $[0,2\pi]$ جواب‌ها عبارتند از: $x=\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$

۲۱- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a\cos 4x+b\sin 2x$ است. b کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $-\sqrt{3}$



$$f'(\frac{\pi}{12})=-4a\sin(4\times\frac{\pi}{12})+2b\cos(2\times\frac{\pi}{12})=$$

$$-4a\frac{\sqrt{3}}{2}+2b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0\longrightarrow b=2a$$

$$f(x)=a\cos 4x+2a\sin 2x \longrightarrow f'(x)=-4a\sin 4x+4a\cos 2x$$

$$-4a\sin 4x+4a\cos 2x=0\longrightarrow \cos 2x-\sin 4x=0\longrightarrow \cos 2x-2\sin 2x.\cos 2x=0$$

$$\begin{cases}\cos 2x=0\\ \ldots\end{cases}$$

که این ریشه‌های منفی برای دو معادله‌ی فوق به ترتیب $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{4} \\ x=-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12} \end{cases}$ هستند که نزدیک‌ترین آن‌ها به صفر $x=-\frac{\pi}{4}$ است. اولین اکسترمم نسبی f در اعداد منفی مقدار -3 دارد پس:

$$-3=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=a\cos\left(4\times\frac{-\pi}{4}\right)+2a\sin\left(2\times\frac{-\pi}{4}\right)=-a-2a \to -3=-3a \to a=1$$

$$b=2a \to b=2$$

۲۲- به ازای کدام مجموعه مقادیر a طول یکی از اکسترمم‌های نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^3+ax^2-8x$ در بازه‌ی $(1,4)$ قرار می‌گیرد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $-2<a<1.5$ ۲) $-3<a<2.5$ ۳) $-5<a<1.5$ ۴) $-5<a<2.5$

اگر $f'(1).f'(4)<0$ باشد طبق قضیه‌ی بولزانو نقطه‌ی c عضو بازه‌ی $(1,4)$ موجود است به طوری که $f'(c)=0$

$$f'(x)=3x^2+2ax-8 \to \begin{cases} f'(1)=2a-5 \\ f'(4)=8a+40 \end{cases}$$

$$f'(1).f'(4)<0 \longrightarrow (2a-5)(8a+40)<0 \to -5<a<2.5$$

۲۳- نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

$$f(x)=(x-1)|x^2+x-2|=\begin{cases} x^3-3x+2 & x<-2, x>1 \\ -(x^3-3x+2) & -2\leq x\leq 1 \end{cases}$$

$x=\pm1$ ریشه‌های معادله‌ی $3x^2-3=0$ هستند که با توجه به ضابطه‌های f' سبب می‌شود که $x=\pm1$ نقاط بحرانی تابع f هستند زیرا: $f'(-1)=f'(1)=0$

$$f'_-(2)=9, \quad f'_+(-2)=-9 \to f'_-(-2)\neq f'_+(-2)$$

نقاط بحرانی تابع f $\begin{cases} x=-2 : f(-2)=0 \longrightarrow A\begin{vmatrix}-2\\0\end{vmatrix} \\ x=-1 : f(-1)=-4 \longrightarrow B\begin{vmatrix}-1\\-4\end{vmatrix} \end{cases}$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\times BH=\frac{1}{2}(3\times4)=6$$

۴۴ـ در کدام بازه تابع با ضابطهٔ $f(x)=e^{x-2x^2}$ صعودی و شکل نمودار آن رو به پایین است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $(-\infty, \frac{1}{4})$ ۲) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ۳) $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ۴) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

$f'(x)>0$ و $f''(x)<0$

$$f'(x)=(1-4x)e^{x-2x^2} \xrightarrow{f'(x)>0} (1-4x)e^{x-2x^2}>0 \xrightarrow{e^{x-2x^2}>0} 1-4>0 \to x<\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=-4e^{x-2x^2}+(1-4x)^2e^{x-2x^2}=((1-4x)^2-4)e^{x-2x^2} \xrightarrow{f''(x)<0}$$

$$(-1-4x)(3-4x)e^{x-2x^2}<0 \xrightarrow{e^{x-2x^2}>0} (4x+1)(4x-3)<0 \to -\frac{1}{4}<x<\frac{3}{4} \quad (۱$$

مجموعه جواب نهایی: (۱) و (۲) اشتراک $= (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

۴۵ـ نمودار تابع $y=x\ln|x|$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $(-1, -\frac{1}{e})$ ۲) $(-\frac{1}{e}, 0)$ ✓ ۳) $(0, \frac{1}{e})$ ۴) $(\frac{1}{e}, 1)$

$$y=x\ln|x|=\begin{cases} x\ln x & x>0 \\ x\ln(-x) & x<0 \end{cases} \qquad y'=\begin{cases} 1+\ln x & x>0 \\ 1+\ln(-x) & x<0 \end{cases}$$

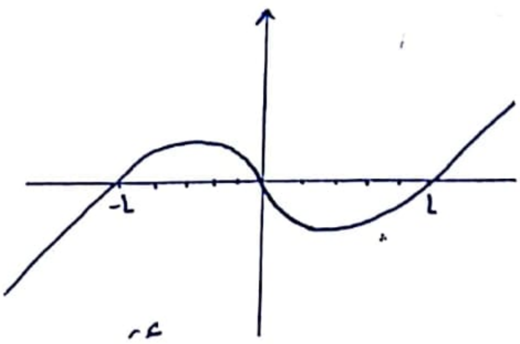
برای حل $y''<0$ واضح است که جواب ها در حالت $x>0$ نیستند. بنابراین اگر $x<0$ آنگاه

$y'=1+\ln(-x)<0$ و لذا $\ln(-x)<-1$ پس داریم:

$$\ln(-x)<\ln\frac{1}{e} \to -x<\frac{1}{e} \to x>-\frac{1}{e}$$

$$y''=\begin{cases} \frac{1}{x} & x>0 \\ \frac{1}{x} & x<0 \end{cases}$$

پس $y''<0$ یعنی $\frac{1}{x}<0$ که به ازای $x<0$ اتفاق می‌افتد.



۲۶_ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y=(x-1)^2\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۷_ اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x)=|x|(x+a)$ در نقطه‌ی زاویه‌دار آن عمود بر هم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $\{-1\}$ ۲) $\{1,-1\}$ ۳) $\{1\}$ ۴) $\varnothing$

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a) ; & x\geq 0 \\ -x(x+a) ; & x<0 \end{cases} \longrightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+ax ; & x\geq 0 \\ -x^2-ax ; & x<0 \end{cases} \longrightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+a ; & x>0 \\ -2x-a ; & x<0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f'_+(0)=a \\ f'_-(0)=-a \end{cases} \xrightarrow[\text{بر هم عمودند}]{\text{مماس چپ و راست}} a(-a)=-1 \longrightarrow a^2=1 \longrightarrow a=\pm 1$$

۲۸_ خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و ۱- از منحنی به معادله‌ی $y=x^3+ax^2+2x$ را به هم وصل می‌کند، در این نقطه مماس است. a کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

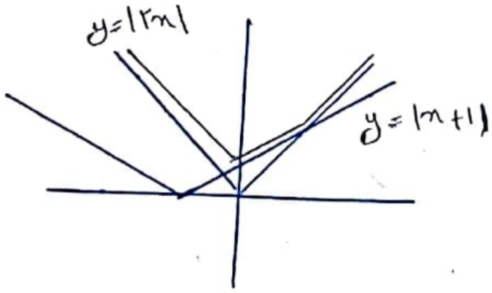
۱) ۱ و ۱- ✓ ۲) ۲ و ۱ ۳) ۱- و ۲+ ۴) ۱ و ۳-

۲۹_ اگر $f(x)=\max\{|2x|, |x+1|\}$ آن‌گاه مینیمم تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) ۲

نمودار رسم‌شده همان تابع $f(x)$ است که کم‌ترین مقدار آن در تقاطع دو تابع در قسمت منفی است.

$$\xrightarrow{-1<x<0} -2x=x+1 \longrightarrow x=-\frac{1}{3} \longrightarrow f(-\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$$



۳۰- اگر $x>0$ و $f(x)=xe^x$ آن‌گاه، خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول e واقع بر آن محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{e}$

$$e=xe^x \longrightarrow \boxed{x=1}\ ;\ f'(x)=e^x+xe^x \longrightarrow f'(1)=e^1+e^1=2e\ ;$$

$$(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}=m \quad \text{شیب مماس}$$

$$\text{معادله‌ی مماس}\quad y-1=\frac{1}{2e}(x-e) \xrightarrow{x=0} y=\frac{1}{2}$$

۳۱- خط گذرا بر دو نقطه به طول‌های ۱ و $\frac{1}{2}$ واقع بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{1}{x^2}$ در نقطه‌ای با کدام طول بر این منحنی مماس است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) -20 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) نشونی

۳۲- نقطه‌ی $M(x,y)$ بر روی منحنی $y=x^2$ از مبدأ مختصات دور می‌شود. اگر مؤلفه‌ی x با سرعت ثابت ۰/۰۵ افزایش یابد، سرعت افزایش فاصله‌ی M از مبدأ مختصات در لحظه‌ی $x=\frac{12}{5}$ تقریباً کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) ۰/۱۸ ۲) ۰/۲۱ ۳) ۰/۲۴ ۴) ۰/۲۶

با توجه به اطلاعات مسئله: $x'_t=0/05\ ,\ x=\frac{12}{5}$

فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات برابر است با: $d=\sqrt{x^2+y^2}$

با توجه به اینکه $y=x^2$ است داریم: $d=\sqrt{x^2+x^4}$

حال برای محاسبه‌ی سرعت افزایش فاصله‌ی M از مبدأ از رابطه‌ی فوق نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$d'_t=\frac{2x+4x^3}{2\sqrt{x^2+x^4}}\,x'_t=\frac{2x(1+2x^2)}{2x\sqrt{1+x^2}}\times x'_t \longrightarrow d'_t=\frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,x'_t$$

$$d'_t=\frac{1+2\left(\frac{144}{25}\right)}{\sqrt{1+\frac{144}{28}}}\times\frac{5}{100}=\frac{313}{1300}\simeq 0/24$$

۳۳ - دو نقطهٔ $A(2,3)$ و $B(4,7)$ و خط به معادلهٔ $y=x-1$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض اند. از نقطهٔ M بر روی خط مفروض با کدام طول انتخاب شود به طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطهٔ مفروض بیش‌ترین مقدار را داشته باشد؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) -1 ۲) صفر ✓   ۳) ۱   ۴) ۳

۳۴ - از نقطهٔ $A(2,9)$ دو خط مماس بر منحنی $y=-x^2+2x+8$ رسم شده است. تانژانت زاویهٔ بین این دو خط مماس کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{7}{10}$ ۳) $\frac{8}{11}$ ۴) $\frac{7}{6}$

$$-x^2+2x+8=m(x-2)+9 \longrightarrow x^2+(m-2)x+(4-2m)=0$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه مضاعف}} \Delta=(m-2)^2-4(4-2m)=0 \longrightarrow \Delta=m^2+4m-12=0 \longrightarrow (m+6)(m-2)=0$$

$$\begin{cases} m_1=-6 \\ m_2=2 \end{cases}$$

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-6-2}{1+(-6)(2)}\right|=\frac{8}{11}$$

۳۵ - در بازهٔ (a,b) نمودار تابع $y=\sqrt{x+3}$ در بالای نمودار تابع $f(x)=|x-1|-2$ قرار دارد. بیش‌ترین مقدار $(b-a)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۴)

۱) ۶   ۲) ۷   ۳) ۸ ✓   ۴) ۹

$$\sqrt{x+3}\geq |x-1|-2$$

$$\sqrt{x+3}=x-3 \longrightarrow x+3=x^2-6x+9 \longrightarrow x^2-7x+6=0 \longrightarrow \begin{cases} x=1 & \times \\ x=6 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3}=-x-1 \longrightarrow x+3=x^2+2x+1 \longrightarrow x^2+x-2=0 \longrightarrow \begin{cases} x=1 & \times \\ x=-2 \end{cases}$$

جواب نامعادلهٔ مورد نظر (۶ و ۲-) که بیش‌ترین طول این بازه ۸ است.

۳۶- به ازای کدام مقادیر m خط به معادله‌ی $y=(m-2)x+3$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y=\tan^{-1}\frac{1}{x}$ است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $0<m<1$ ۲) $0<m<2$ ۳) $1<m<2$ ۴) $2<m<3$

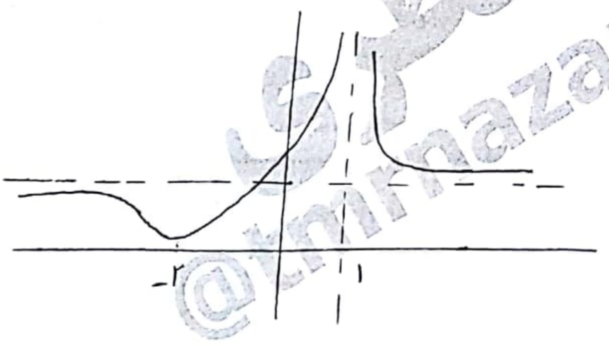
۳۷- به ازای کدام مقدار a خط به معادله‌ی $y=-3x+2$ بر منحنی به معادله‌ی $y=\frac{x^2+9}{x-2}$ مماس است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) -1 ۲) صفر ۳) 1 ۴) 2

۳۸- امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{3}$ با نیمساز ربع سوم زاویه‌ی α می‌سازد. $\tan\alpha$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۳۹- شکل زیر نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^2+9}{x^2+bx+c}$ است. a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



۱) -2 ۲) 1 ۳) 2 ۴) 3